

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224**

**A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188**

**B. α. Σωστό**

**β. Σωστό**

**γ. Λάθος**

**δ. Λάθος**

**ε. Σωστό**

**ΘΕΜΑ 2°**

**α. Αν  $z = x + yi$ , τότε**

$$(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - i)(x + yi) + (2 + i)(x - yi) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 2yi - xi + y + 2x - 2yi + xi + y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2y = -4x + 8 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4 \quad (1)$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι η ευθεία  
 $(\varepsilon) : y = -2x + 4$ .

**β. Από τη σχέση (1) για  $y = 0$  έχουμε  $x = 2$ , άρα  $z_1 = 2$**

Από τη σχέση (1) για  $x = 0$  έχουμε  $y = 4$ , άρα  $z_2 = 4i$

$$\begin{aligned} \gamma \cdot |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= |2 + 4i|^2 + |2 - 4i|^2 \\ &= \left(\sqrt{2^2 + 4^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (-4)^2}\right)^2 \\ &= 4 + 16 + 4 + 16 \\ &= 40 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

**A.** Έστω  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \ln \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2}, \quad x > -1$$

$$\text{και } e^{f(x)} = \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^u = e^L \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2} \in \mathbb{R}$$

Ο παρονομαστής είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο  
άρα πρέπει και ο αριθμητής να είναι επίσης πρώτου βαθμού  
άρα  $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

**B.** Για  $\lambda = -1$  είναι  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ ,  $x > -1$

$$\alpha. f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0, \text{ για } x > -1.$$

άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x+2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x+2} \stackrel{\frac{x+1}{x+2} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $(-\infty, 0)$ .

**β.**  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , άρα

η  $C_f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την  $x = -1$  και

η  $C_f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την  $y = 0$  ( $x'x$ )

**γ.** Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα  $f(x) = -\alpha^2 < 0$ .

Το  $-\alpha^2$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-1, +\infty)$ ,

άρα η εξίσωση  $f(x) = -\alpha^2$  έχει μοναδική λύση, για κάθε  $\alpha \neq 0$

#### ΘΕΜΑ 4°

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \right)' \\ &= 6x - \frac{[f''(x) - 2f'(x)] \cdot e^{2x} - [f'(x) - 2f(x)] \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} \\ &= 6x - \frac{f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \\ &= 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \quad (2) \end{aligned}$$

$$= 6x - \frac{kxe^{2x}}{e^{2x}} = 6x - kx$$

$$= (6 - k)x \quad (3)$$

- α.**
- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως πράξεις συνεχών
  - Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$  με  $g'(x) = (6 - k)x$
  - $g(0) = \frac{f'(0) - 2f(0)}{e^0} = \frac{2f(0) - 2f(0)}{1} = 0$
- $$g(2) = 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = 12 - \frac{2f(2) + 12e^4 - 2f(2)}{e^4}$$
- $$= 12 - \frac{12e^4}{e^4} = 12 - 12 = 0$$

Άρα η  $g$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

**β.** Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 2)$ , τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 6\xi - \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$6\xi e^{2\xi} - f''(\xi) + 4f'(\xi) - 4f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

$$\gamma. g'(\xi) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (6 - k)\xi = 0 \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} 6 - k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

(3)  $\Rightarrow g(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [0, 2]$ , άρα  $g$  σταθερή στο  $[0, 2]$   
και επειδή  $g(0) = 0$ , θα είναι  $g(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [0, 2]$

**δ.** Για κάθε  $x \in [0, 2]$  είναι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$(x^3)' = \left[ \frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' \stackrel{\text{συνέπειες Θ.Μ.Τ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(x)}{e^{2x}} = x^3 + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x^3 + c)e^{2x} \quad (4)$$

$$(4) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(1) = (1 + c)e^2 \Leftrightarrow e^2 = (1 + c)e^2 \Leftrightarrow c = 0$$

$$(4) \stackrel{c=0}{\Rightarrow} f(x) = x^3 e^{2x}, x \in [0, 2]$$

**ε.**

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx \\ &= \int_1^2 x e^{2x} dx \\ &= \int_1^2 x \left( \frac{e^{2x}}{2} \right)' dx \\ &= \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 (x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \\ &= \frac{4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2}{4} \\ &= \frac{3e^4 - e^2}{4} \end{aligned}$$